

Литература:

- 1) Тимонов А. Н., Самарский А. А. —
— „УМФ“
- 2) Бицадзе А. В. — „УМФ“
- 3) Фарбуц С. — „УрЦТ д/научных работников и инженеров“
- 4) Мзоркин Т. И. — „Курс Д и ЦУ с деп. Числами анализа“ (2-е изд.)

Уравнения математической физики

Михонов Иван Владимирович 10/2/09

УМФ (= уравнения в частн. произв. (УрЧП))

Предметом курса явл-ся ур-ния в $\mathbb{R}^n$ произв., т.е. дифф. ур-ния, содержащие знания о произв. от неизвест. ф-ции многих перемен. Такие ур-ния возникают при описании сложн. физ. процессов с некотор. степенями свободы, где есть коорд-ты, время и некая неизвест. ф-ция (вещина), зависящая от них.

Решением УрЧП наз-ся ф-ция соответствующей гладкости, обращающая ур-ние в верное тожд-во.

Понятие решения отдельно уточняется в каждой конкрет. ситуа-ции

Порядок УрЧП опред-ся стар-

и ее производ, входящей в ур-ние. В основном будем изучать ур-ния 2го пор-ка (классич. теория), точнее даже 3 основных (главных) ур-ния

Основные УМФ (физич. версия)

I) $U_{xx} + U_{yy} + U_{zz} = 0$, $U = U(x, y, z) = ?$
(эта др-ция ищется)

$$\left[\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0 \right]$$

Это ур-ние Лапласа.

II) $U_{tt} = a^2 (U_{xx} + U_{yy} + U_{zz})$, $U = U(x, y, z, t) = ?$
— ур-ние акустич. колебаний (ур-ние акустики) // след. семестр
→ скорость звука, a

III) $U_t = a^2 (U_{xx} + U_{yy} + U_{zz})$, $U = U(x, y, z, t) = ?$
— ур-ние теплопроводности (распространение тепла в твердых телах) // след. семестр

В основном будем & более простые маломерные аналоги этих ур-ний:

I') $U_{xx} + U_{yy} = 0$, $U = U(x, y) = ?$ —
— двумерное ур-ние Лапласа

II') $U_{tt} = a^2 U_{xx}$, $U = U(x, t) = ?$ — ур-ние

колебаний струны

III') $u_t = a^2 u_{xx}$, $u = u(x, t) = ?$ — одномерное ур-ние теплопроводности

Размерность ур-ний обычно опред-ся по числу пространств переменных (коорд-т)

Перечисленные ур-ния явл-ся типичными представителями своих широких классов Ур ЧТ

Классификация Ур ЧТ 2-го пор-ка

* след. ур-ние общего вида:

$$\underbrace{\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}}_{\text{главная часть}} + \underbrace{\sum_{k=1}^n b_k \frac{\partial u}{\partial x_k}}_{\text{линейные слагаемые}} + \underbrace{c \cdot u}_{\text{неоднород. слагаемое}} = f(x),$$

$u = u(x) = u(x_1, \dots, x_n) = ? \quad (1)$

Здесь $x = (x_1, \dots, x_n)$ — коорд-ты в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$; a_{ij} , b_k , c — заданные числ. коэф-ты

(1) — Ур ЧТ с постоянн. коэф-тами

$f(x) \equiv 0 \Rightarrow (1)$ — линейное однород. ур-ние (ЛО)

$f(x) \neq 0 \Rightarrow (1)$ — линейное неоднород. ур-ние (ЛНО)

Линейность ур-ния означает линейность присутствующим в нем коэффициентам неизв. ф-ции

$$\text{ЛНУ: } \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{k=1}^n b_k \frac{\partial u}{\partial x_k} + cu = f(x) \quad (1)$$

$$\text{ЛО: } \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{k=1}^n b_k \frac{\partial u}{\partial x_k} + cu = 0 \quad (1_0)$$

Основные принципы

I) $\forall$ л/к решений ЛО тоже авт-ся решением $[u_1, \dots, u_m - \text{решения } (1_0) \Rightarrow \Rightarrow \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_m u_m - \text{реш. } (1_0)]$

II) Общ. реш. ЛНУ есть $\sum$ общ. реш. ЛО и частн. реш. ЛНУ

Покажем, что всякое ур-ние вида (1_0) можно свести к чему-то похожему на одно из 3х основ ур-ний

✗ ЛО ур-ние 2-го пор-ка с пост. коэф-тами: $\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{k=1}^n b_k \frac{\partial u}{\partial x_k} + cu = 0$

$u = u(x) = ? \quad (1_0)$ [Запись коэф-тов в главной части, вообще говоря, не

однозначна: $2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + 5 \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1} = 7 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}$

$= \frac{7}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{7}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1}$ мб так удобно на практике

удобно в теории

$A = (a_{ij})$ считается симметричной, $A^T = A$
 (в приведении ур-ий к канон. виду)
 Всякое ур-ние с постоян. коэфф-ми
 вида (10) при помощи подбора
 новых коорд-т $s = P\vec{x}$ ← старые коорд., $\det P \neq 0$,
 можно привести к след. канонич. виду:

$$\sum_{i=1}^n \varepsilon_i \frac{\partial^2 u}{\partial s_i^2} + \sum_{k=1}^n \beta_k \frac{\partial u}{\partial s_k} + \gamma u = 0, \quad u = u(s) = u(\vec{s})$$
← новые коорд. ← м-ца перехода (10)

где $\varepsilon_i \in \{-1, 1, 0\}$, β_k, γ — некие коэфф.
 ($\gamma = 0$).

Здесь $s = P\vec{x}$ — замена коорд-т вида

$$\begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & \dots & p_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & \dots & p_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

с некотор. невырожд. м-цей P . $(s_1, \dots, s_n)$ — новые канон. коорд.

Связь: $u = f(s) = f(s_1, \dots, s_n)$ — реш. нового преобр. ур-ния (10)

Тогда $u = f(P\vec{x})$ — реш. исход. ур-ния (10)

и этот метод дает все возможные реш.
 $g/(1_0)$
▲ Без доп-ва ■ (Реш. вопрос прогр-мы)

Приведение к виду $(\tilde{I}_0)$ возможно
разными способами с разными выбо-
рами м-цы P , но кол-во ~~знаков~~ "+",
"-", и 0 в м.ч-ти всегда получа-
ются одинак. (закон инерции). На этом осно-
вана след. классификация $g/U_2/U_2$ -
го пор-ка. Возьмем ур-ние (I_0) , при-
ведем к канон. виду $(\tilde{I}_0)$. Возможна
1 из 3х ситуаций:

1) $\epsilon_i \neq 0, \forall i$, и все ϵ_i одного знака $\Rightarrow$
 $\Rightarrow (I_0)$ и $(\tilde{I}_0)$ — ур-ние эллиптического
типа

Пример $U_{S_1 S_1} + U_{S_2 S_2} = 0, U = U(S_1, S_2) = ?$
(ур-ние Лапласа)

2) $\epsilon_i \neq 0, \forall i$, но ^{среди} ϵ_i есть разные знаки $\Rightarrow$
 $\Rightarrow (I_0)$ и $(\tilde{I}_0)$ — ур-ние гиперболического
типа

Пример $U_{S_1 S_1} - U_{S_2 S_2} = 0$, $U = U(S_1, S_2) = ?$
(у-ние колебаний)

3) $\exists \varepsilon_k = 0$ (и есть ненул. коэф-ты) $\Rightarrow$
 $\Rightarrow (I_0)$ и $(\tilde{I}_0)$ — у-ния параболического
типа

Пример $U_{S_1 S_1} - U_{S_2} = 0$ (одномер. у-ние
теплопроводности)